

08 - Kurvendiskussion

Vorkurs Mathematik SoSe 2022

Lukas Mürmann

Fakultät Informatik - Lehrstuhl 7 - TU Dortmund

17.03.2022

Kurvendiskussion

Einleitung

- Heute wiederholen wir kurz Kurvendiskussionen
- Bei dieser untersucht man ausführlich eine gegebene Funktion bzw. deren Graphen
- Im Fokus stehen dabei die geometrischen Eigenschaften des Graphen (Schnittpunkte mit den Achsen, Wendepunkte, etc.)
- Diese gewonnenen Informationen erlauben es, eine Skizze des Graphen anzufertigen ohne eine ausführliche Wertetabelle aufzustellen.
- Aus dieser sollen dann die ermittelten Eigenschaften unmittelbar ablesbar sein!

Kurvendiskussionen heute

- Heutzutage existieren sogenannte Funktionsplotter, mit denen man sich Graphen von Funktionen schnell anzeigen lassen kann
- Wozu dann noch eine Kurvendiskussion führen?
- Ziel der Kurvendiskussionen in der heutigen Zeit:
 - ▶ Koordinaten der charakteristischen Punkte **exakt** zu bestimmen.
 - ▶ Solche Punkte (Extrempunkte, Wendepunkte, etc.) lassen sich bei Funktionsplottern meist nur ungefähr ablesen.
 - ▶ Die charakteristischen Eigenschaften der Funktion werden durch die Kurvendiskussion bewiesen.
 - ▶ Die Kurvendiskussion ist unabhängig von der Auflösung, die beim Plotten der Funktion gewählt wird.
 - ▶ Ein lokales Minimum kann sich bei entsprechender Vergrößerung als lokales Maximum herausstellen.

Elemente der Kurvendiskussion

- Wir wollen nun schrittweise alle Punkte einer Kurvendiskussion wiederholen.
- Dabei wird jeweils angemerkt was genau zu tun ist und welche Verfahren angewendet werden können.
- Im Folgenden bezeichnet f die Funktion, über die eine Kurvendiskussion geführt wird.

1. Definitionsbereich bestimmen

- Anzumerken ist hier, dass bei Kurvendiskussionen im Allgemeinen die Menge \mathbb{R} aller reellen Zahlen als Grundmenge vorausgesetzt wird.
- Bei der Bestimmung des (maximalen) Definitionsbereichs einer Funktion wird daher die (maximale) Teilmenge von \mathbb{R} gesucht, für die $f(x)$ definiert ist.
- **Beispiel:**

$$f(x) = \frac{1}{x^2(x-4)}, \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$$

2. Nullstellen bestimmen

- Hier werden die Stellen bzw. Punkte bestimmt, an denen der Graph von f die x -Achse schneidet.

- Es gilt dabei also:

$$f(x_1) = 0$$

- Wobei x_1 eine Nullstelle darstellt.
- Hierbei gibt es mehrere Möglichkeiten zur Bestimmung dieser Stellen:
 - ▶ p-q Formel bei quadratischen Funktionsgleichungen.
 - ▶ Quadratische Ergänzung
 - ▶ Substitution
 - ▶ Horner Schema
 - ▶ Polynomdivision
- Bei den letzten beiden Verfahren muss man zuerst ein Nullstelle "erraten".

3. Schnittpunkt y -Achse bestimmen

- Hier rechnen wir einfach $f(0)$ aus und erhalten so den Schnittpunkt mit der y -Achse
- Gibt es kein Ergebnis, so schneidet der Graph von f offensichtlich nicht die y -Achse

4. Extremstellen berechnen und Punkte bestimmen

- An Extremstellen lassen sich Maxima und Minima des Funktionsgraphen finden.
- Also sozusagen die Täler und Berge.
- Diese können lokal sein oder global. Dies lässt durch das Monotonieverhalten der Graphen bestimmen.
- Dabei muss folgendes für eine Extremstelle x gelten:
 - ▶ Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$
 - ▶ Hinreichende Bedingung: $f''(x) \neq 0$
 - ▶ Ist $f''(x) > 0$, so handelt es sich um einen Tiefpunkt.
 - ▶ Ist $f''(x) < 0$, so handelt es sich um einen Hochpunkt.

5. Wendepunkte bestimmen

- Wir wollen nun schrittweise alle Punkte einer Kurvendiskussion wiederholen.
- Dabei wird jeweils angemerkt was genau zu tun ist und welche Verfahren angewendet werden können.

6. Krümmung des Graphen bestimmen

- Wir wollen nun schrittweise alle Punkte einer Kurvendiskussion wiederholen.
- Dabei wird jeweils angemerkt was genau zu tun ist und welche Verfahren angewendet werden können.

7. Symmetrieverhalten bestimmen

- Wir wollen nun schrittweise alle Punkte einer Kurvendiskussion wiederholen.
- Dabei wird jeweils angemerkt was genau zu tun ist und welche Verfahren angewendet werden können.

8. Grenzverhalten bestimmen

- Wir wollen nun schrittweise alle Punkte einer Kurvendiskussion wiederholen.
- Dabei wird jeweils angemerkt was genau zu tun ist und welche Verfahren angewendet werden können.

9. Graph zeichnen bzw. skizzieren

- Wir wollen nun schrittweise alle Punkte einer Kurvendiskussion wiederholen.
- Dabei wird jeweils angemerkt was genau zu tun ist und welche Verfahren angewendet werden können.

10. Monotonieverhalten bestimmen

- Wir wollen nun schrittweise alle Punkte einer Kurvendiskussion wiederholen.
- Dabei wird jeweils angemerkt was genau zu tun ist und welche Verfahren angewendet werden können.

11. Bildbereich bestimmen

- Wir wollen nun schrittweise alle Punkte einer Kurvendiskussion wiederholen.
- Dabei wird jeweils angemerkt was genau zu tun ist und welche Verfahren angewendet werden können.