

# 08 - Kurvendiskussion

## Vorkurs Mathematik SoSe 2022

Lukas Mürmann

Fakultät Informatik - Lehrstuhl 7 - TU Dortmund

17.03.2022

# Kurvendiskussion

1 / 16

2 / 16

## Einleitung

- Heute wiederholen wir kurz Kurvendiskussionen
- Bei dieser untersucht man ausführlich eine gegebene Funktion bzw. deren Graphen
- Im Fokus stehen dabei die geometrischen Eigenschaften des Graphen (Schnittpunkte mit den Achsen, Wendepunkte, etc.)
- Diese gewonnenen Informationen erlauben es, eine Skizze des Graphen anzufertigen ohne eine ausführliche Wertetabelle aufzustellen.
- Aus dieser sollen dann die ermittelten Eigenschaften unmittelbar ablesbar sein!

3 / 16

## Kurvendiskussionen heute

- Heutzutage existieren sogenannte Funktionsplotter, mit denen man sich Graphen von Funktionen schnell anzeigen lassen kann
- Wozu dann noch eine Kurvendiskussion führen?
- Ziel der Kurvendiskussionen in der heutigen Zeit:
  - ▶ Koordinaten der charakteristischen Punkte **exakt** zu bestimmen.
  - ▶ Solche Punkte (Extrempunkte, Wendepunkte, etc.) lassen sich bei Funktionsplottern meist nur ungefähr ablesen.
  - ▶ Die charakteristischen Eigenschaften der Funktion werden durch die Kurvendiskussion bewiesen.
  - ▶ Die Kurvendiskussion ist unabhängig von der Auflösung, die beim Plotten der Funktion gewählt wird.
  - ▶ Ein lokales Minimum kann sich bei entsprechender Vergrößerung als lokales Maximum herausstellen.

4 / 16

## Elemente der Kurvendiskussion

## 1. Definitionsbereich bestimmen

- Wir wollen nun schrittweise alle Punkte einer Kurvendiskussion wiederholen.
- Dabei wird jeweils angemerkt was genau zu tun ist und welche Verfahren angewendet werden können.
- Im Folgenden bezeichnet  $f$  die Funktion, über die eine Kurvendiskussion geführt wird.

- Anzumerken ist hier, dass bei Kurvendiskussionen im Allgemeinen die Menge  $\mathbb{R}$  aller reellen Zahlen als Grundmenge vorausgesetzt wird.
- Bei der Bestimmung des (maximalen) Definitionsbereichs einer Funktion wird daher die (maximale) Teilmenge von  $\mathbb{R}$  gesucht, für die  $f(x)$  definiert ist.
- **Beispiel:**

$$f(x) = \frac{1}{x^2(x-4)}, \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$$

5 / 16

6 / 16

## 2. Nullstellen bestimmen

## 3. Schnittpunkt y-Achse bestimmen

- Hier werden die Stellen bzw. Punkte bestimmt, an denen der Graph von  $f$  die x-Achse schneidet.
- Es gilt dabei also:

$$f(x_1) = 0$$

- Wobei  $x_1$  eine Nullstelle darstellt.
- Hierbei gibt es mehrere Möglichkeiten zur Bestimmung dieser Stellen:
  - ▶ p-q Formel bei quadratischen Funktionsgleichungen.
  - ▶ Quadratische Ergänzung
  - ▶ Substitution
  - ▶ Horner Schema
  - ▶ Polynomdivision
- Bei den letzten beiden Verfahren muss man zuerst ein Nullstelle "erraten".

- Hier rechnen wir einfach  $f(0)$  aus und erhalten so den Schnittpunkt mit der y-Achse
- Gibt es kein Ergebnis, so schneidet der Graph von  $f$  offensichtlich nicht die y-Achse

7 / 16

8 / 16

## 4. Extremstellen berechnen und Punkte bestimmen

- An Extremstellen lassen sich Maxima und Minima des Funktionsgraphen finden.
- Also sozusagen die Täler und Berge.
- Diese können lokal sein oder global. Dies lässt durch das Monotonieverhalten der Graphen bestimmen.
- Dabei muss folgendes für eine Extremstelle  $x$  gelten:
  - ▶ Notwendige Bedingung:  $f'(x) = 0$
  - ▶ Hinreichende Bedingung:  $f''(x) \neq 0$
  - ▶ Ist  $f''(x) > 0$ , so handelt es sich um einen Tiefpunkt.
  - ▶ Ist  $f''(x) < 0$ , so handelt es sich um einen Hochpunkt.

9 / 16

## 5. Wendepunkte bestimmen

- Wir wollen nun schrittweise alle Punkte einer Kurvendiskussion wiederholen.
- Dabei wird jeweils angemerkt was genau zu tun ist und welche Verfahren angewendet werden können.

10 / 16

## 6. Krümmung des Graphen bestimmen

- Wir wollen nun schrittweise alle Punkte einer Kurvendiskussion wiederholen.
- Dabei wird jeweils angemerkt was genau zu tun ist und welche Verfahren angewendet werden können.

11 / 16

## 7. Symmetrieverhalten bestimmen

- Wir wollen nun schrittweise alle Punkte einer Kurvendiskussion wiederholen.
- Dabei wird jeweils angemerkt was genau zu tun ist und welche Verfahren angewendet werden können.

12 / 16

## 8. Grenzverhalten bestimmen

- Wir wollen nun schrittweise alle Punkte einer Kurvendiskussion wiederholen.
- Dabei wird jeweils angemerkt was genau zu tun ist und welche Verfahren angewendet werden können.

13 / 16

## 9. Graph zeichnen bzw. skizzieren

- Wir wollen nun schrittweise alle Punkte einer Kurvendiskussion wiederholen.
- Dabei wird jeweils angemerkt was genau zu tun ist und welche Verfahren angewendet werden können.

14 / 16

## 10. Monotonieverhalten bestimmen

- Wir wollen nun schrittweise alle Punkte einer Kurvendiskussion wiederholen.
- Dabei wird jeweils angemerkt was genau zu tun ist und welche Verfahren angewendet werden können.

15 / 16

## 11. Bildbereich bestimmen

- Wir wollen nun schrittweise alle Punkte einer Kurvendiskussion wiederholen.
- Dabei wird jeweils angemerkt was genau zu tun ist und welche Verfahren angewendet werden können.

16 / 16